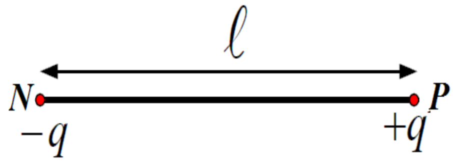
CHAPITRE 3 : DIPOLE ELECTROSTATIQUE

Etude générale du champ et potentiel électrostatique produit à grande distance par une distribution discrète de charges particulièrement par un doublet électrostatique de deux charges.

1. Notion de dipôle électrostatique – moment dipolaire

1.1. Définition du dipôle électrostatique

Un dipôle électrostatique ou doublet électrostatique est un système constitué par deux charges ponctuelles de valeur opposées $(+q)$ et $(-q)$ placés en deux points séparés par une distance ℓ (supposée invariable) très petite par rapport aux dimensions d'étude. La charge totale d'un dipôle est ainsi nulle : $\sum q = -q + q = 0$



1.2. Moment dipolaire

Tout dipôle électrique possède un moment dipolaire ou vecteur moment électrique noté $\vec{p}$ toujours orienté de la charge $-q$ (au point N) vers la charge $+q$ (au point P) (avec $q > 0$) : $\boxed{\vec{p} = q\overrightarrow{NP}}$.

$$on\ pose\ \vec{\ell} = \overrightarrow{NP} = \ell\vec{u}\ \ où\ \vec{u}: vecteur\ unitaire\ suivant\ NP\ et\ \ell = \|\overrightarrow{NP}\|$$

$$\boxed{\vec{p} = q\vec{\ell} \quad et\ \|\vec{p}\| = p = q\ell}$$

Le moment dipolaire $\vec{p}$ caractérise entièrement le dipôle.

- Le module p du moment dipolaire s'exprime en $C.m$ en unité S.I.
- à l'échelle microscopique on utilise le Debye (D) : $1\ D = 3{,}336.10^{-30} C.m$
  Exemple : la molécule Hcl a un moment dipolaire $p = 1{,}03\ D$.

Un dipôle est dit rigide si $p = cte$.

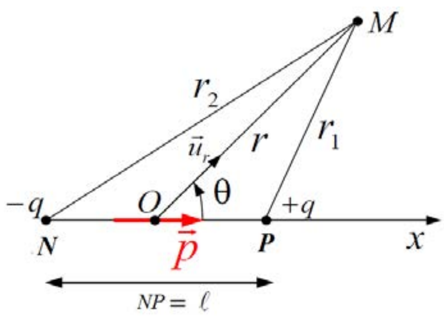
1.3. Généralisation de la notion de dipôle électrostatique

D'une manière générale un dipôle électrostatique est un modèle de distributions de charges dont la charge totale est nulle (distribution dipolaire) en étudiant ses effets à grande distance devant la dimension caractéristique de la distribution et dont les barycentres des charges négatives ; point N et des charges positives ; point P sont distincts, la charge q étant la somme des charges positives de la distribution.

2. Champ et potentiel électrostatique produit par un dipôle électrostatique

Soit un dipôle d'axe (Ox) représenté sur le schéma ci-contre :

où O milieu de $[N, P]$. On pose $r = OM$, $r_1 = MP$, $r_2 = MN$, $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$ ($\vec{u}_r$ étant le vecteur unitaire porté par OM et orienté de O vers M), $\theta = (\vec{p}, \vec{r})$ et on choisit les coordonnées sphériques d'axe (Ox) (axe du dipôle). Il y a invariance de la distribution de charge par toute rotation autour de l'axe du dipôle, le champ et le potentiel



électrostatique ne dépendent donc pas de φ, mais seulement de r et θ. M est alors repéré par ses coordonnées polaires $(r,\,\theta)$. On se place par ailleurs dans **l'approximation dipolaire** : cela implique que le point M est suffisamment éloigné du dipôle pour que $\ell = NP$ soit très petit devant r_1 et r_2 et $r \gg \ell$.

2.1. Potentiel électrostatique du dipôle

2.1.1.Expression du potentiel

Le potentiel V(M) créé par le dipôle au point M est : $V(M) = V_+(M) + V_-(M)$

$$\Rightarrow V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 MP} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 MN} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} \Rightarrow V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

a. **Première méthode** (moins rigoureuse) : $V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right)$

$r_1 \gg \ell$ et $r_2 \geq \ell$ on peut écrire alors que $r_1 r_2 \approx r^2$. En considérant le triangle NPH rectangle en H (H étant la projection de P sur la droite (M,N)), on a $r_2 - r_1 = NH \approx \ell cos\theta$. D'où : $\boxed{\boldsymbol{V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\ell cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{pcos\theta}{r^2}}}$

b. **Deuxième méthode** (plus rigoureuse)

Dans les triangles NMO et PMO on exprime $r_1 = MP$ et $r_2 = MN$:

$$r_1^2 = r^2 + \frac{\ell^2}{4} - 2\frac{\ell}{2}rcos\theta = r^2 + \frac{\ell^2}{4} - \ell rcos\theta$$

$$r_2^2 = r^2 + \frac{\ell^2}{4} + 2\frac{\ell}{2}rcos\theta = r^2 + \frac{\ell^2}{4} + \ell rcos\theta \quad \text{d'où :}$$

$$r_1 = r\left(1 - \frac{\ell cos\theta}{r} + \frac{\ell^2}{4r^2}\right)^{1/2} \Rightarrow \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{\ell cos\theta}{r} + \frac{\ell^2}{4r^2}\right)^{-1/2}$$

$$r_2 = r\left(1 + \frac{\ell cos\theta}{r} + \frac{\ell^2}{4r^2}\right)^{1/2} \Rightarrow \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\ell cos\theta}{r} + \frac{\ell^2}{4r^2}\right)^{-1/2}$$

Approximation dipolaire : $r \gg \ell$. En négligeant le terme $\frac{\ell^2}{r^2}$ devant $\frac{\ell}{r}$ et en utilisant le développement limité de $(1 + x)^{-1/2}$ au premier ordre qui est $(1+x)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}x$, on a : $\frac{1}{r_1} \approx \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\ell cos\theta}{2r}\right)$ et $\frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{r}\left(1 - \frac{\ell cos\theta}{2r}\right)$ d'où : $\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \approx \frac{\ell}{r^2}cos\theta$. Il vient donc: $\boxed{\boldsymbol{V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\ell cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{pcos\theta}{r^2}}}$

or : $\vec{p} = q\overrightarrow{NP} = q\vec{\ell} = q\ell\vec{u}_x \Rightarrow \vec{p}.\vec{u}_r = q\ell cos\theta = pcos\theta$.

Finalement le potentiel créé par le dipôle est : $\boxed{\boldsymbol{V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}.\vec{u}_r}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}.\vec{r}}{r^3}}}$.

On montre que $\overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$ d'où : $\boxed{\boldsymbol{V(M) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{p}.\overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{r}\right)}}$.

2.1.2. Application aux Atomes et molécules polaires

Les atomes ou les molécules peuvent se comporter comme de simples dipôles. Considérons les atomes et les molécules dans leur état normal de systèmes de charges neutres (somme des charges nulle):

- ✓ Dans un atome, le barycentre des charges positives coïncide en général avec celui des charges négatives donc le moment dipolaire des atomes est nul.
- ✓ Lorsque l'atome est placé dans un champ électrique, les deux barycentres s'écartent l'un de l'autre et un moment dipolaire apparait : l'atome se comporte comme un dipôle, il est dit polarisé.

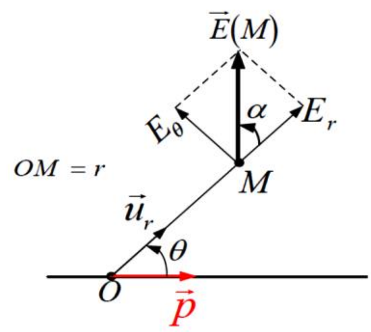
- ✓ Pour les molécules, deux cas sont à considérer. Certaines ($H2$, $Cl2$, $N2$, $CO2$, ….) sont comme les atomes non polarisés mais le plus souvent les molécules sont polarisées car dissymétriques. Ces molécules dissymétriques ayant une distribution dipolaire possèdent alors un moment dipolaire permanent.

2.2. Champ électrostatique créé par le dipôle

- ➢ Le champ électrostatique créé par le dipôle est de révolution autour de l'axe portant le vecteur $\vec{p}$ (axe du dipôle), ce qui implique qu'en un point quelconque M, le vecteur $\vec{E}(M)$ est situé dans le plan contenant $\vec{p}$ et passant par le point M (plan de symétrie de la distribution de charges) et n'a pas de composante suivant $\vec{u}_\varphi$.
- ➢ Le champ électrostatique se déduit du potentiel par :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M) = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{E} = E_r\vec{u}_r + E_\theta\vec{u}_\theta \Longrightarrow E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad \text{et} \quad E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{cases} \boldsymbol{E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2pcos\theta}{r^3}} \\ \boldsymbol{E_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{psin\theta}{r^3}} \end{cases}} \quad \text{Soit:} \quad \boxed{\boldsymbol{\vec{E}(M) = \frac{2pcos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{u}_r + \frac{psin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{u}_\theta}}$$



Le vecteur champ électrostatique en M :

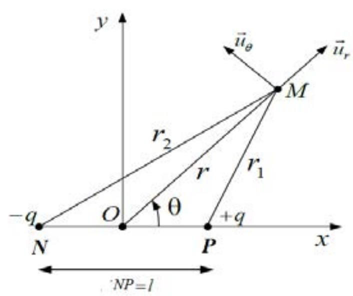
- ✓ admet pour norme $E(M) = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \sqrt{\frac{4p^2cos^2\theta}{16\pi^2{\varepsilon_0}^2r^6} + \frac{p^2sin^2\theta}{16\pi^2{\varepsilon_0}^2r^6}}$

$$\Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{E(M) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{3cos^2\theta + 1}}}$$

- ✓ fait avec $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ un angle α tel que $\Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{\tan\alpha = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{1}{2}tan\theta}}$

- **Cas particuliers**
  - ➢ Lorsque le point M est situé sur l'axe du dipôle, $\theta = 0$, $\boldsymbol{E_\theta = 0}$ et $\boldsymbol{E_r = E_x = \frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 x^3}}$

    Le champ électrostatique du dipôle est un champ radial
  - ➢ Lorsque le point M est situé sur l'axe perpendiculaire à l'axe du dipôle, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\boldsymbol{E_r = 0}$ et $\boldsymbol{E_\theta = E_y = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 y^3}}$



- **Expression intrinsèque du champ électrostatique**

  $\vec{E}(M) = \frac{2pcos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{u}_r + \frac{psin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{u}_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2pcos\theta\vec{u}_r + psin\theta\vec{u}_\theta)$

  $or\ \vec{p} = pcos\theta\vec{u}_r - psin\theta\vec{u}_\theta \Longrightarrow pcos\theta = \vec{p}.\vec{u}_r\ et\ psin\theta\vec{u}_\theta = \overline{(\vec{p}.\vec{u}_r)}\vec{u}_r - \vec{p}$

  $d'où$ $\boxed{\boldsymbol{\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(3(\vec{p}.\vec{u}_r)\vec{u}_r - \vec{p})}}$

  Le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ peut donc s'écrire sous la forme intrinsèque (indépendant du système de coordonnées) : $\boxed{\boldsymbol{\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^5}(3(\vec{p}.\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p})}}$

Remarque

Lorsqu'on s'éloigne du dipôle, le potentiel décroit en $1/r^2$ (comparé à $1/r$ pour une charge ponctuelle) et le champ en $1/r^3$ (comparé à $1/r^2$ pour une charge ponctuelle).

3. Topographie du dipôle électrostatique

3.1. Lignes du champ

Par définition les lignes de champ sont tangentes en tout point au champ donc en coordonnées polaires on peut écrire : $\overrightarrow{dr}$ *colinéaire* à $\vec{E} \quad \Longrightarrow \quad \vec{E} \wedge \overrightarrow{dr} = \vec{0}$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{E}(M) = E_r\vec{u}_r + E_\theta\vec{u}_\theta \\ \overrightarrow{dr} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta\end{array}\right\} \Longrightarrow \vec{E}\left|\begin{array}{l}E_r\\E_\theta\end{array}\right. \wedge \overrightarrow{dr}\left|\begin{array}{l}dr\\rd\theta\end{array}\right. = \vec{0} \Longrightarrow E_r rd\theta - E_\theta dr = 0 \quad \Longrightarrow \frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta} \Longrightarrow \frac{dr}{2\cos\theta} = \frac{rd\theta}{\sin\theta} \Longrightarrow$$

$\frac{dr}{r} = 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta \Longrightarrow \frac{dr}{r} = 2\frac{d(\sin\theta)}{\sin\theta}$. Par intégration, il vient que :

$\ln\left(\frac{r}{r_o}\right) = 2\ln(\sin\theta)$ où r_o est la constante d'intégration

Finalement : $\boxed{r = r_0 \sin^2\theta}$: *Equation des lignes de champ*

3.2. Surfaces équipotentielles

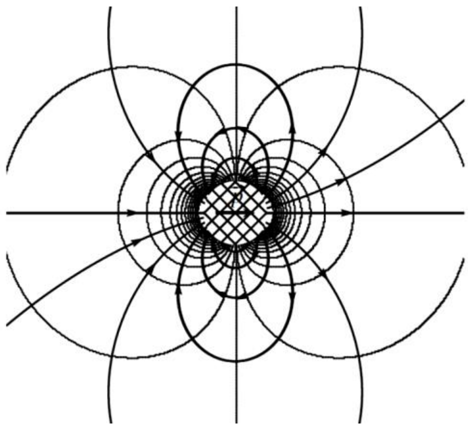
Les surfaces équipotentielles sont définies par $V(M) = V(r,\theta) = constante$

$V(r,\theta) = cte = V_0 \Longrightarrow \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = V_0 \Longrightarrow r^2 = A\cos\theta$ où $A = cte = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 V_0}$.d'où en posant $B = cte = \sqrt{A}$:

$\boxed{r = B\sqrt{|\cos\theta|}}$: *Equation des équipotentielles*

3.3. Diagramme électrique

Lignes de champ (lignes orientées) et équipotentielles (lignes non orientées) créées par le dipôle



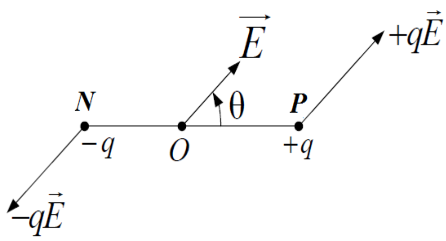
Les équations des lignes de champ et des équipotentielles n'étant valables qu'à grande distance (approximation dipolaire), les équipotentielles et les lignes de champ ne s'approchent pas des charges (zone hachurée : zone à courte distance). Les équipotentielles et les lignes de champ sont bien orthogonales en tout point.

4. Action d'un champ électrostatique extérieur sur un dipôle électrostatique

4.1. Action subit par le dipôle

Soit un dipôle électrostatique de moment dipolaire $\vec{p}$ placé dans un champ électrostatique extérieur $\vec{E}_{ext}$. On adoptera les notations habituelles.

4.1.1. Action d'un champ uniforme



a. Force résultante subie par un dipôle dans un champ électrostatique extérieur uniforme

Champ uniforme : $\vec{E}_{ext}(N) = \vec{E}_{ext}(O) = \vec{E}_{ext}(P)$. La force résultante subie par le dipôle est :

$$\vec{F} = \vec{F}(N) + \vec{F}(P) = -q\vec{E}_{ext}(N) + q\vec{E}_{ext}(P) = (-q+q)\vec{E}_{ext} \implies \boxed{\vec{F} = \vec{0}}$$

La résultante des actions subies par un dipôle dans un champ électrostatique uniforme est nulle.

b. Moment résultant dans un champ électrostatique extérieur uniforme

Le moment résultant des actions s'exerçant sur le dipôle est (en le calculant au point O) :

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{ON} \wedge (-q\vec{E}_{ext}) + \overrightarrow{OP} \wedge (q\vec{E}_{ext}) = q(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON})\vec{E}_{ext} = q\overrightarrow{NP} \wedge \vec{E}_{ext} \implies \boxed{\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{p} \wedge \vec{E}_{ext}}.$$

Ce moment est donc indépendant du point où on le calcule.

Le dipôle est ainsi soumis à l'action d'un couple de forces $\vec{F}(N) = -\vec{F}(P)$ de moment : $\boldsymbol{\vec{\mathcal{M}}_O = pE_0 sin\theta \vec{u}}$

En notant $\vec{E}_{ext} = \vec{E}_0$, θ l'angle entre le moment dipolaire $\vec{p}$ et le champ $\vec{E}_0$. $\vec{u}$: vecteur unitaire de $\vec{\mathcal{M}}_O$ (vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{p}$ et à $\vec{E}_0$)

c. Equilibre du dipôle

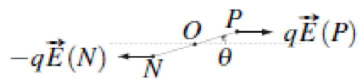
Condition d'équilibre $\Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{0} \Rightarrow \theta = 0$ ou $\theta = \pi$.

Le couple tend à orienter le dipôle parallèlement au champ $\vec{E}_0$.

✓ Lorsque le dipôle est écarté très légèrement de sa position d'équilibre :

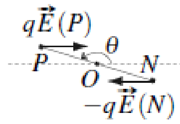
- **Pour θ = 0**

Le couple tend à ramener le dipôle dans sa position d'équilibre, c'est donc une position d'équilibre stable.



- **Pour θ = π**

Le couple tend à éloigner le dipôle de sa position d'équilibre, c'est donc une position d'équilibre instable.



Le dipôle est donc soumis à un couple de forces qui tend à l'orienter parallèlement au champ $\vec{E}_0$ et dans le même sens.

<u>Conclusion</u> :

Un champ électrostatique uniforme tend à orienter un dipôle suivant les lignes de champ.

4.1.2. Cas d'un champ non uniforme

a. Force résultante subie par un dipôle dans un champ électrostatique extérieur non uniforme

La force résultante subie par le dipôle s'écrit :

$$\vec{F} = \vec{F}(N) + \vec{F}(P) = -q\vec{E}_{ext}(N) + q\vec{E}_{ext}(P) = q\left(\vec{E}_{ext}(P) - \vec{E}_{ext}(N)\right).$$

Le champ extérieur n'étant pas uniforme, les forces $\vec{F}(N)$ et $\vec{F}(P)$ ne sont plus de norme égales et opposées et la force résultante n'est plus nulle ; le champ variant entre N et P. L'approximation dipolaire impose que la distance NP soit faible devant les dimensions d'étude, en particulier devant la distance caractéristique des variations du champ électrostatique extérieur. On peut alors effectuer un développement limité des trois composantes cartésiennes du champ électrostatique en P et en N.

Soient *(x,y,z)* les coordonnées de O milieu de [NP] et *(dx,dy,dz)* les coordonnées de $\overrightarrow{NP}$. D'où N a pour coordonnées $(x - \frac{dx}{2}, y - \frac{dy}{2}, z - \frac{dz}{2})$ et P $(x + \frac{dx}{2}, y + \frac{dy}{2}, z + \frac{dz}{2})$.

La composante suivant l'axe Ox de la résultante des forces subies par le dipôle est donc :

$$F_x = q\left(E_x(x+\frac{dx}{2}, y+\frac{dy}{2}, z+\frac{dz}{2}) - E_x(x-\frac{dx}{2}, y-\frac{dy}{2}, z-\frac{dz}{2})\right) = qdE_x$$

$$\Rightarrow F_x = q\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}dx + \frac{\partial E_x}{\partial y}dy + \frac{\partial E_x}{\partial z}dz\right) \Rightarrow F_x = p_x\frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y\frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z\frac{\partial E_x}{\partial z}$$

De même :

$$F_y = q\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}dx + \frac{\partial E_y}{\partial y}dy + \frac{\partial E_y}{\partial z}dz\right) = p_x\frac{\partial E_y}{\partial x} + p_y\frac{\partial E_y}{\partial y} + p_z\frac{\partial E_y}{\partial z}$$

$$F_z = q\left(\frac{\partial E_z}{\partial x}dx + \frac{\partial E_z}{\partial y}dy + \frac{\partial E_z}{\partial z}dz\right) = p_x\frac{\partial E_z}{\partial x} + p_y\frac{\partial E_z}{\partial y} + p_z\frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Pour un dipôle rigide $p = \|\vec{p}\| = cte$, le moment dipolaire est indépendant des coordonnées donc du champ appliqué d'où : $F_x = \frac{\partial(E_x p)}{\partial x} + \frac{\partial(E_x p)}{\partial y} + \frac{\partial(E_x p)}{\partial z}$. On écrit de même pour F_y et F_z d'où : $\boxed{\vec{F} = \overrightarrow{grad}(\vec{p}.\vec{E}_{ext})}$.

b. Moment résultant dans un champ électrostatique extérieur non uniforme

Le moment résultant s'écrit : $\vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{ON} \wedge \left(-q\vec{E}_{ext}(N)\right) + \overrightarrow{OP} \wedge \left(q\vec{E}_{ext}(P)\right)$.

La distance NP étant très faible devant les distances d'étude, par un développement limité au premier ordre du champ extérieur en N et P autour de point O, on peut écrire :

$\vec{E}_{ext}(N) = \vec{E}_{ext}(O) + \delta\vec{E}(N)$ et $\vec{E}_{ext}(P) = \vec{E}_{ext}(O) + \delta\vec{E}(P)$. D'où :

$$\vec{\mathcal{M}}_O = q\overrightarrow{OP} \wedge \left(\vec{E}_{ext}(O) + \delta\vec{E}(P)\right) - q\overrightarrow{ON} \wedge \left(\vec{E}_{ext}(O) + \delta\vec{E}(N)\right)$$

$$\Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_O = q\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON}\right) \wedge \vec{E}_{ext}(O) + q\left(\overrightarrow{OP} \wedge \delta\vec{E}(P) - \overrightarrow{ON} \wedge \delta\vec{E}(N)\right) \simeq q\overrightarrow{NP} \wedge \vec{E}_{ext}(O)$$

En négligeant les termes du premier ordre. Le moment résultant est finalement : $\boxed{\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{p} \wedge \vec{E}_{ext}(O)}$.

Soit la même expression que dans le cas d'un champ extérieur uniforme.

c. Action d'un champ électrostatique extérieur non uniforme sur un dipôle rigide

✓ Effet du moment résultant

Comme dans le cas du champ uniforme, le moment résultant tend à orienter le dipôle dans le sens des lignes de champ.

✓ Effet de la force résultante

Considérons l'exemple d'un dipôle rigide de moment dipolaire $\vec{p} = p\vec{u}_x$ dans un champ électrostatique $\vec{E}_{ext} = E(x)\vec{u}_x$. Le dipôle subie alors la force $\vec{F} = F\vec{u}_x$ avec $F = p\frac{dE(x)}{dx}$.

Si p > 0, le dipôle est de même sens que le champ donc F a le signe de $\frac{dE(x)}{dx}$. Le dipôle se déplace dans les zones de champ fort.

✓ Conclusion

Le dipôle électrique s'aligne parallèlement au champ électrostatique extérieur et se déplace dans le sens des zones de champ plus élevé.

4.2. Energie potentielle d'interaction

4.2.1. Expression de l'énergie potentielle

Si V est le potentiel dont dérive le champ extérieur :

Pour la charge +q en P, l'énergie potentielle est : $E_p(q) = qV(P)$

Pour la charge −q en N, l'énergie potentielle est : $E_p(-q) = -qV(N)$.

L'énergie potentielle du dipôle est l'énergie nécessaire à un opérateur extérieur pour amener le dipôle (supposé rigide) depuis l'infini jusqu'à sa position actuelle (où la charge –q se trouve en N et la charge + q en P). C'est la somme des énergies potentielles de chacune de ses charges : $E_P = q(V(P) - V(N))$.

La distance NP étant très faible devant la distance caractéristique de variation du champ, on effectue un développement limité au premier ordre du potentiel autour de O milieu de $[NP]$:

$V(N) = V(O) - \left(\frac{dV}{dr}\right)_O \frac{NP}{2}$ et $V(P) = V(O) + \left(\frac{dV}{dr}\right)_O \frac{NP}{2} \Rightarrow V(P) - V(N) = \left(\frac{dV}{dr}\right)_O NP = \overrightarrow{NP}.(\overrightarrow{grad}V)_O$

D'où : $E_P = q\overrightarrow{NP}.(\overrightarrow{grad}V)_O = \vec{p}.\left(\overrightarrow{grad}V\right)_O$. Or $\vec{E}_{ext}(O) = -\left(\overrightarrow{grad}V\right)_O$.

Finalement l'énergie potentielle d'un dipôle dans un champ extérieur est : $\boxed{\boldsymbol{E_P = -\vec{p}.\vec{E}_{ext}(O)}}$.

La résultante des forces $\vec{F}$ subies par le dipôle dérive de l'énergie potentielle, d'où : $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_P \implies$ $\boxed{\boldsymbol{\vec{F} = \overrightarrow{grad}\left(\vec{p}.\vec{E}_{ext}(O)\right)}}$. On retrouve l'expression de la force résultante.

4.2.2. Position d'équilibre du dipôle

Notons $\vec{E}_{ext}(O) = \vec{E}_0$ et $= (\vec{p}, \vec{E}_0) \implies E_P = -pE_0 \cos\theta$.

Les positions d'équilibre correspondent aux extremums de E_P soit pour $\frac{dE_P}{d\theta} = 0 \implies \sin\theta = 0$

$\implies \theta = 0$ ou $\theta = \pi$.

La position θ = 0 correspond à un minimum d'énergie potentielle ($E_P = -pE_0$) donc à une position d'équilibre stable.

La position θ = π correspond à un maximum d'énergie potentielle ($E_P = pE_0$) donc à une position d'équilibre instable.